GAME-THEORETIC FOUNDATIONS OF MULTIAGENT SYSTEMS

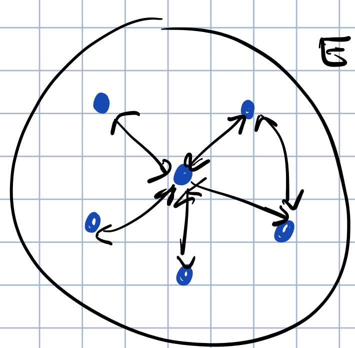
Algorithms and applications

2021

mbasilicogtfmsaa.ariel.ctu.unimi.it

- Introduction to the course
- Organization (hours, lectures, exam, grading)
- People

MULTI-AGENT SYSTEM



Agente => Decision Maker

MODELLO DESCRIVE
DECISIONI INTERATTIVE

↓

CAPIRE COME GLI
AGENTI DEVONO
COMPORTARSI O COME
SI COMPORTANO

Prescrittivo

Descrittivo

TEORIA DELLE DECISIONI INTERATTIVA

↳ TEORIA DEI GIOCHI → **TEORIA DEI GIOCHI ALGORITMICA**

- **Cooperative** : OGGETTO DI STUDIO È IL GRUPPO (COALIZIONI) ←
- **Competitiva** : OGGETTO DI STUDIO È L'INDIVIDUO ←

AGENTE $\longrightarrow$ SELF-INTERESTED AGENT

- ha preferenze sui diversi stati di E
- vuole proattivamente portare E in uno degli stati che preferisce

STATO DI E dipende da le decisioni dell'agente i e di tutti gli altri $-i$

OBIETTIVO

- Formalizzare le preferenze
- Quantificarle
- Considerare l'incertezza

$\Big\}$ UTILITY THEORY

$$O = \{o_1, o_2, o_3, \dots, o_k\} \quad o_i \quad (\text{Outcome})$$

$$\forall\, o_1, o_2 \in O$$

$o_1 \succeq o_2$ l'agente preferisce "debolmente" o_1 a o_2

$o_1 \sim o_2$ " è indifferente tra o_1 e o_2

$o_1 \succ o_2$ " preferisce strettamente o_1 a o_2

LOTTERIE

$$\ell = [p_1 : o_1, p_2 : o_2, \dots, p_k : o_k] \quad o_i \in O$$

$$p_i \geq 0 \qquad \sum_{i=1}^{k} p_i = 1 \qquad \mathcal{L} \supseteq O$$

- Completezza

$\forall\, O_1, O_2 \qquad \underline{O_1 \succ O_2} \quad o \quad \underline{O_2 \succ O_1} \quad o \quad \underline{O_1 \sim O_2}$

$O_1 \succ O_2$	$O_2 \succ O_1$	$O_1 \sim O_2$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$O_1 \succsim O_2$	$O_2 \succsim O_1$	$O_1 \succsim O_2$
not $O_2 \succsim O_1$	not $O_1 \succsim O_2$	$O_2 \succsim O_1$

$\left.\begin{array}{l} \text{not } O_1 \succsim O_2 \\ \text{not } O_2 \succsim O_1 \end{array}\right]$ INDECISIONE

- Transitività

$\forall\, O_1, O_2, O_3 \quad \text{if } O_1 \succsim O_2 \wedge O_2 \succsim O_3 \Longrightarrow O_1 \succsim O_3$

$O_1 \succsim O_2 \quad \wedge \quad O_2 \succsim O_3 \quad \wedge \quad O_3 \succ O_1$

$O_i \succsim O_j \qquad m_{ji} =$ € per passare da O_j a O_i

$$O_3 \xrightarrow{m_{32}} O_2 \xrightarrow{m_{21}} O_1 \xrightarrow{m_{13}} O_3$$

$m_{ij} > 0 \qquad m_{32} + m_{21} + m_{13} \qquad O_3 \longrightarrow O_3$!!

Sostituibilità

$$O_1 \sim O_2$$

$$[p : O_1, p_3 : O_3, p_4 : O_4 \dots p_K : O_K] = l_1$$

$$\sim$$

$$[p : O_2, p_3 : O_3, p_4 : O_4 \dots p_K : O_K] = l_2$$

$$l_1 \sim l_2$$

Decomponibilità

l $\quad P(l, i) =$ P di ottenere O_i dalla lotteria l

$$\forall O_i \quad P(l_1, i) = P(l_2, i) \Rightarrow l_1 \sim l_2$$

"NO FUN IN GAMBLING"

Monotonicità

if $O_1 > O_2$ e $p > q \Rightarrow$

$$[p : O_1, (1-p) : O_2] > [q : O_1, (1-q) : O_2]$$

Continuation

If $o_1 > o_2 \wedge o_2 > o_3 \Rightarrow$

$\exists p \in [0, 1] \quad o_2 \sim [p : o_1 , (1-p) : o_3]$

(Th. Von Neumann and Morgenstern)

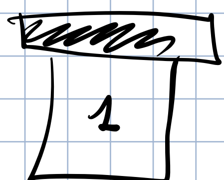
$u : \mathcal{O} \longrightarrow [0, 1]$

- $u(o_1) \geq u(o_2)$ iff $o_1 \succeq o_2$
- $u([p_1 : o_1, p_2 : o_2, p_3 : o_3, \dots, p_k : o_k]) = \sum_{i=1}^{k} p_i \, u(o_i)$

FUNZIONE DI UTILITÀ

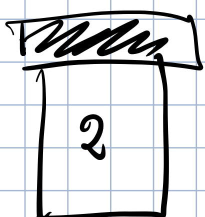
Risk Neutral

SELF-INTERESTED AGENT $i \equiv u_i$



Scatola 1 : 900.000 € <u>CASH</u>

↑ $u(1) = 800$ K



Scatola 2 :

0.5 2M € (Cash)

0.5 FREE DINNER

$u(2) = 1M$

<u>Risk aversion</u>

MONEY m_{ij} ci sono situazioni economiche dove il concetto di denaro non si può applicare?

BEHAVIORAL ECONOMICS

"Predictably Irrational" Dan Ariely

$$\text{Agente} \xrightarrow[\text{SULLE SUE PREFERENZE}]{} \text{Utility function } U$$

ASSUNZIONI RAGIONEVOLI SULLE SUE PREFERENZE

massimizzare u

$$\text{Agente 1} \longleftrightarrow \text{Agente 2}$$

u_1 u_2

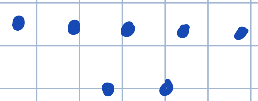
modello formale che descrive l'interazione tra agenti che vogliono massimizzare la propria u → GIOCO

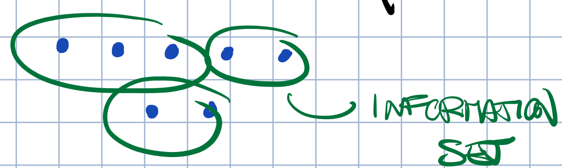
CHE COSA DEFINISCE UN GIOCO?

- numero di giocatori ≥ 2
- le azioni per ogni giocatore
- corrispondenza tra azioni e esiti $a \rightarrow o$
- struttura sequenziale
- informazione presente nel gioco

  COMPLETA vs INCOMPLETA

  PERFETTO vs IMPERFETTA (struttura sequenziale)





MECCANISMO

COSA NON È DEFINITO DA UN GIOCO?

- comportamento dei giocatori → STRATEGIA
- Giochi in forma strategica (forma normale)
- NON STRUTTURA SEQUENZIALE
- No incertezze, informazione completa, azioni deterministiche
- # azioni di ogni giocatore è FINITO

$N = \{1, 2, \dots, n\}$ Set giocatori

$A_i = \{\dots\}$ Set di azioni per giocatore i

$A = \bigtimes_{i=1}^{n} A_i$ Spazio delle azioni congiunte

$a \in A \quad a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

$\forall i \quad u_i : A \rightarrow \mathbb{R} \quad ([0,1])$

$\cancel{u_i : A_i \rightarrow \mathbb{R}}$

MATCHING PENNIES

2 Giocatori, 2 monete, ciascuno mostra il lato di una moneta all'altro contemporaneamente.

TESTA / CROCE

Giocatore 1 vince se i lati delle monete sono uguali
" 2 " " " " " " diversi

② giocatore di colonna

① Giocatore di riga

	T	C
T	$r, -r$	$-r, r$
C	$-r, r$	$r, -r$

$A_1 = A_2 = \{T, C\}$

$r > 0$

Bimatrix games

$$A = \begin{bmatrix} v & -v \\ -v & v \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -v & v \\ v & -v \end{bmatrix}$$

$\downarrow$ Gioco a Somma zero

---

funzione di utilità per il giocatore i

$u_i : \mathcal{L} \longrightarrow [0,1]$ ($a u_i() + b$ a, b costanti, $a > 0$ è ancora una f. di utilità)

$v > 0$

$A_1 = A_2 = \{T, C\}$ $\quad A = A_1 \times A_2$ $\leftarrow$ action profiles

		giocatore (2)	
		T	C
giocatore (1)	T	$v, -v$	$-v, v$
	C	$-v, v$	$v, -v$

$$A = \begin{bmatrix} v & -v \\ -v & v \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -v & v \\ v & -v \end{bmatrix}$$

NORMAL FORM (STRATEGIC FORM)

$$\forall (a_1, a_2) \in A \qquad u_1(a_1, a_2) + u_2(a_1, a_2) = \emptyset$$

Zero - Sum (2-player games)

$\uparrow$

Pura competizione

$$\ell_1, \ell_2 \qquad u_1(\ell_1) \geq u_1(\ell_2) \Longleftrightarrow u_2(\ell_1) \leq u_2(\ell_2)$$

SOMMA-ZERO $\subseteq$ SOMMA COSTANTE $\subseteq$ STRICTLY COMPETITIVE GAMES

1, -1	3, -5
2, -3	1, -1

$$\forall (a_1, a_2) \in A \quad u_1(a_1, a_2) + u_2(a_1, a_2) = c$$

$a = 1 \qquad b = -\frac{c}{2}$ (Sottraggo $\frac{c}{2}$ a ogni payoff di ogni giocatore)

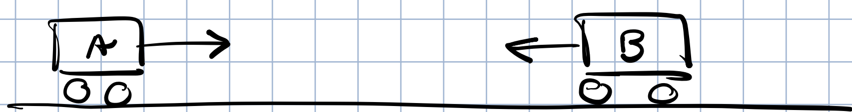
$\Downarrow$

ZERO-SUM

POSITIVE-SUM: win-win situations (Joint venture)

NEGATIVE-SUM: lose-lose situations (budget cuts)

COORDINATION GAME



B

A	Left	Right
Left	1, 1	0, 0
right	0, 0	1, 1

TEAM GAME

$$\forall a \in A_1 \times A_2 \dots \times A_m$$

$$\forall i, j \in N \quad u_i(a) = u_j(a)$$

Battle of Sexes

Alice e Bob

Bob vorrebbe andare al pub

Alice " " alle opera house

Vorrebbero incontrarsi

		B: Opera	B: Pub
A	Opera	2, 1	0, 0
A	Pub	0, 0	1, 2

STRATEGIE

σ_i : STRATEGIA DEL GIOCATORE i

$$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \qquad \left(\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \right)$$

σ_i prescrive di giocare una singola azione STRATEGIA PURA

σ_i " " randomizzare su 2 o più azioni STRATEGIA MISTA

$$0 \leq \sigma_i(a_i) \leq 1 \quad \forall a_i \in A_i \qquad \sum_{a_i \in A_i} \sigma_i(a_i) = 1$$

$$\sigma_{-i} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n)$$

SUPPORTO DI σ_i $\quad S(\sigma_i) = \{ a_i \in A_i \mid \sigma_i(a_i) > 0 \}$

$|S(\sigma_i)| = 1$ σ_i pura

$|S(\sigma_i)| = |A_i|$ σ_i completamente mista

- Se il giocatore i gioca σ_i, quanto è la sua utilità? MALPOSTA!

La bontà di σ_i dipende in realtà da $\sigma = (\sigma_i, \sigma_{-i})$

$\sigma \longrightarrow$ randomizzazione sugli esiti del gioco

$$u_i(\underline{\sigma}) = \sum_{a \in A} u_i(a) \prod_{j=1}^{n} \sigma_j(a_j)$$

UTILITÀ ATTESA

a_j è l'azione che j gioca in a

σ_i^* = OPTIMAL STRATEGY

- per valutare σ_i devo sapere cosa faranno gli altri: σ_{-i}
- devo costruire dei BELIEVES su σ_{-i}
- Believes riguardo l'altro giocatore

  $\downarrow$

  Believes riguardo i believes che l'altro ha su di me

  $\downarrow$

  ...

SOLUTION CONCEPT $\longrightarrow$ Subset di outcomes

SOLUTION CONCEPT BASATO SU NOZIONE DI OTTIMALITÀ

- assumere il punto di vista di un osservatore esterno e neutrale
- Considerare la natura multi-obiettivo del problema

$$(3, 10^3) \quad vs \quad (4, 1)$$ Quale è meglio?

PARETO EFFICIENZA (PARETO OTTIMALITÀ)

σ^1 e σ^2

σ^2 è PARETO dominato da σ^1 se — PARETO DOMINANZA

- $\forall i \in N \quad u_i(\sigma^1) \geq u_i(\sigma^2)$ — $(3, 4)$ $(3, 5)$
- $\exists j \in N \quad u_j(\sigma^1) > u_j(\sigma^2)$

σ si dice PARETO EFFICIENTE se non esiste σ' che lo domina

$$PE = \{ \sigma \mid \sigma \text{ è Pareto efficiente} \}$$ SOLUTION CONCEPT

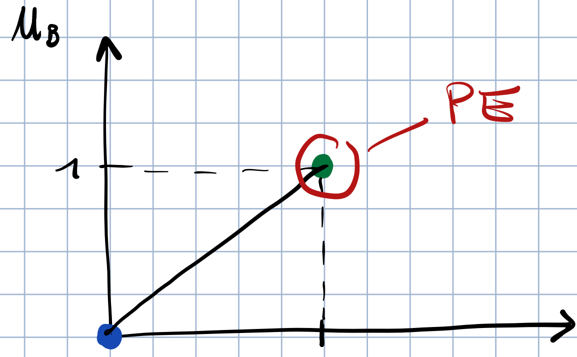
RICORDA! σ DEFINISCE UN OUTCOME DEL GIOCO (MISTO O PURO)

- $|PE| \geq 1$ (PE contiene almeno un esito "puro")
- Zero-Sum $\Rightarrow$ TUTTI GLI ESITI SONO PE ←

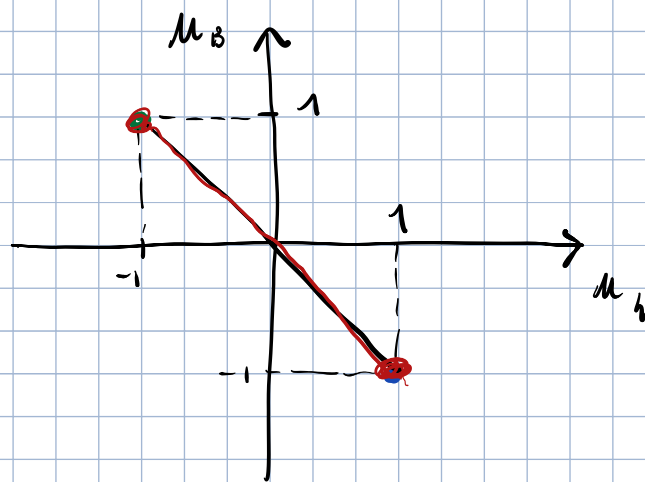
Curva Pareto

B

A		
	1, 1	0, 0
	0, 0	1, 1

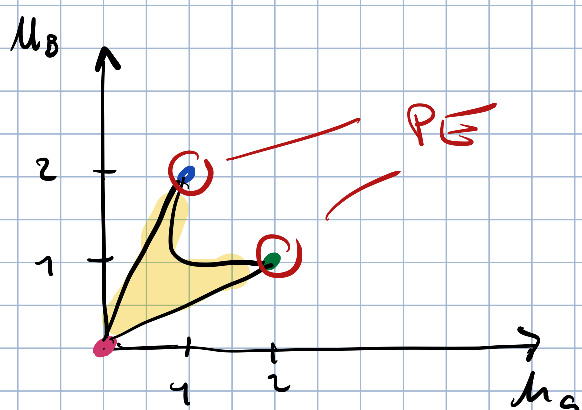


-1, 1	1, -1
1, -1	-1, 1

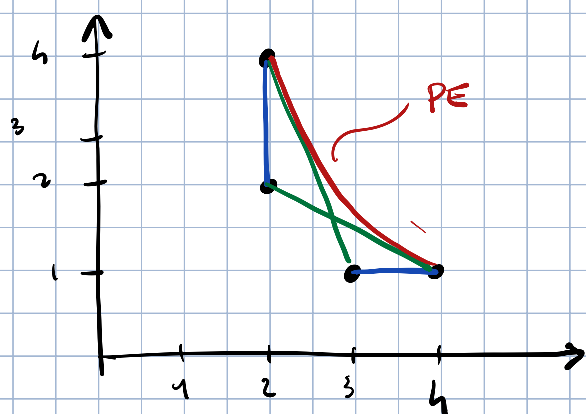


B

A		
	2, 1	0, 0
	0, 0	1, 2



2, 4	3, 1
2, 2	4, 1



- C'è sempre un action profile in PE (outcome puro)
- Calcolare PE è DIFFICILE (in generale)
- Con due giocatori è FACILE

A	B
C	D

2 x 2 gioco bimatrice

PE in σ (all'esatto!)

Ci sono soltanto ~19 casi

$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ STRATEGY PROFILE, induce un outcome del gioco (puro/misto)

$\sigma_i : A_i \longrightarrow [0,1]$ STRATEGIA DI i

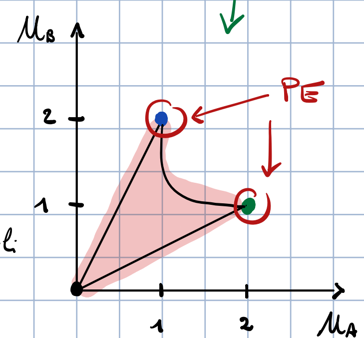
$\sigma_{-i} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n)$ STRATEGY PROFILE SENZA σ_i

$S(\sigma_i) = \{ a_i \in A_i \mid \sigma_i(a_i) > 0 \}$ SUPPORTO DI σ_i

$u(\sigma) = (u_1(\sigma), u_2(\sigma), \dots, u_n(\sigma))$ UTILITY PROFILE DI σ

$u_i(\sigma) = \sum_{a \in A} u_i(a) \prod_{j=1}^{n} \sigma_j(a_j)$ UTILITÀ ATTESA PER i IN σ

		Bob	
		OPERA	PUB
Alice	OPERA	2, 1	0, 0
	PUB	0, 0	1, 2



SOLUTION CONCEPT

- Informalmente: ASSUNZIONI SUI GIOCATORI (Razionalità, Believes) $\longrightarrow$ SELEZIONE DI CERTI OUTCOME DEL GIOCO, COME IL GIOCO PUÒ FINIRE SOTTO LE ASSUNZIONI FATTE
- Formalmente: SUBSET DI OUTCOME (puri o misti) + REGOLE PER COSTRUIRLI/DEFINIRLI
- Attenzione! Un solution concept definisce uno o più punti di arrivo possibili non la strada per arrivarci

$PE = \{ \sigma \mid \sigma$ è Pareto efficiente$\}$ ← primo SC considerato

Da ragionare su cosa gli agenti farebbero

$\downarrow$

a $\underbrace{\text{cosa gli agenti NON farebbero}}$ $\longrightarrow$ DOMINANZA

Σ lo spazio di strategy profile Σ_i Σ_{-i}

$\sigma_i, \sigma_i' \in \Sigma_i$

1) σ_i DOMINA STRETTAMENTE σ_i' SSE

$$\forall \sigma_{-i} \in \Sigma_{-i} \quad u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) > u_i(\sigma_i', \sigma_{-i})$$

2) σ_i DOMINA DEBOLMENTE σ_i' SSE

$$\forall \sigma_{-i} \in \Sigma_{-i} \quad u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(\sigma_i', \sigma_{-i})$$

$$\exists \sigma_{-i}' \in \Sigma_{-i} \quad u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}') > u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}')$$

3) σ_i DOMINA "MOLTO" DEBOLMENTE σ_i' SSE

$$\forall \sigma_{-i} \in \Sigma_{-i} \quad u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(\sigma_i', \sigma_{-i})$$

DOMINANT STRATEGY domina ogni altra strategia

- RARAMENTE ESISTE

- 2 Criminali vengono arrestati
- La polizia è in grado di dimostrare la colpevolezza di un reato minore, ma non riesce a provare un reato più grave
- Separati in due stanze diverse

1 \ 2	S	C
S	-1, -1	-4, 0
C	0, -4	-3, -3

S "Silent"

C "Confessare"

DILEMMA DEL PRIGIONIERO

Strategie pure

PE = { (S, S); (C, S); (S, C) }

Concetto di soluzione basato ITERATED DOMINANCE

	d	e	f
a	9, 3	10, 4	2, 2
b	2, 1	1, 2	0, 15
c	5, 6	4, 7	3, 9

- Non è molto utile rimuovere strategie miste

$$ID = \{ \sigma \mid \sigma_1(b) = 0,\ \sigma_2(d) = 0 \}$$

ID dipende dall'ordine con cui si eliminano le azioni dominate

DOMINANZA STRETTA: NO!

DOMINANZA DEBOLE E MOLTO DEBOLE: SÌ!

① DECIDERE SE σ_i È (STRETTAMENTE) DOMINATA DA UN'AZIONE a_i

FOR ALL $a_i \in A_i$, $a_i \neq \sigma_i$

dominata $\leftarrow$ TRUE

FOR ALL $\boxed{a_{-i} \in A_{-i}}$

IF $u_i(\sigma_i, a_{-i}) \geq u_i(a_i, a_{-i})$

dominata $\leftarrow$ FALSE

RETURN dominata, a_i

Dati a_i, σ_i

HP: $\forall a_{-i} \in A_{-i} \quad u_i(a_i, a_{-i}) > u_i(\sigma_i, a_{-i})$

TH: $\exists \sigma_{-i} \quad u_i(a_i, \sigma_{-i}) \leq u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$

$$\sum_{a_{-i}} \sigma_{-i}(a_{-i}) u_i(a_i, a_{-i}) \leq \sum_{a_{-i}} \sigma_{-i}(a_{-i}) u_i(\sigma_i, a_{-i})$$

$$\boxed{\exists a_{-i} \quad u_i(a_i, a_{-i}) \leq u_i(\sigma_i, a_{-i})}$$

(2) σ_i è dominata da σ_i' ($S(\sigma_i') > 1$)

Calcolare σ_i' t.c.

$$\sum_{a_i \in A_i} \sigma_i'(a_i)\, u_i(a_i, a_{-i}) > u_i(\sigma_i, a_{-i}) \quad \forall a_{-i} \in A_{-i}$$

$$\sigma_i'(a_i) \geq 0 \quad \forall a_i \in A_i$$

$$\sum_{a_i \in A_i} \sigma_i'(a_i) = 1$$

LINEAR PROGRAM

max $w^T x$

s.t.

$Ax \leq b$

$x \geq 0$

$$\min \sum_{a_i \in A_i} \sigma_i'(a_i)$$

s.t.

$$\sum_{a_i \in A_i} \sigma_i'(a_i)\, u_i(a_i, a_{-i}) \geq u_i(\sigma_i, a_{-i}) \quad \forall a_{-i} \in A_{-i}$$

$$\sigma_i'(a_i) \geq 0 \quad \forall a_i \in A_i$$

NO SOMMA 1! Σ all'ottimo < 1

Smoothed P

↳ SIMPLEX (exp, in pratica è anche efficiente)

INTERIOR POINT

	dominanza stretta	altre
Possiamo rimuovere σ_i con ID?	Sì, P	
Possiamo ridurre la dimensione di un gioco: $A_i' \subseteq A_i$?	Sì, P	NP-Completi
Esiste un gioco $\equiv$ dove $\lvert A_i \rvert \le k_i$?	Sì, P	

Prisoner's Dilemma

$$
\begin{array}{c|c|c}
 & \text{2: } S & C \\
\hline
\text{1: } S & -1, -2 & -4, 0 \\
\hline
C & 0, -4 & -3, -3
\end{array}
$$

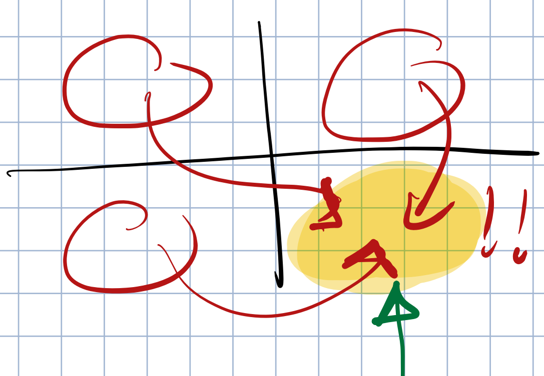
- Consiglia "S"
- FIDUCIA

1) Mi fido del mio avvocato $\rightarrow$ S
2) Anche l'altro fa questo ragionamento! $\rightarrow$ C
3) " " " " $\rightarrow$ C

$\rightarrow$ C

$\rightarrow$ C

$\rightarrow$ C



!! $\leftarrow$ Non PE

AVVOCATO

$\updownarrow$

INTROSPEZIONE

NE (Nash Equilibrium)

Esiste sempre ! (ammettendo strategie miste)

~ 1950 John Nash PhD thesis

26 pagine, / 2 citazioni (1 Von Neumann,
2 Fought - Arthur John Nash)

- Pareto efficienza PE
- Strategia dominante
- Dominanza iterata σ_i vs a_i e σ_i vs σ_j
- Nash
- Maxmin
- Computing Nash
- Refinements and applications (correlated, Stackelberg)

	S	C
S	-1, -2	-4, 0
C	0, -4	-3, -3

STRICTLY COMPETITIVE $\Longleftrightarrow$ ZERO-SUM

1, -1	3, -3
2, -3	1, -1

Best response di un giocatore i

Assumendo che gli altri giocatori giochino σ_{-i}

→ Quale è la strategia migliore per i dato σ_{-i}

$\sigma_i^* \in \Sigma_i$ s.t. $u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}) \geq u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \ \forall \sigma_i$

$$\sigma_i^* = \underset{\sigma_i}{\operatorname{argmax}}\ u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$$

- BR è unica? NO!
- Se i ha più BR $\Rightarrow$ i È INDIFFERENTE TRA LE ALTERNATIVE

σ_i^* : $S(\sigma_i^*) = \{a_1, a_2\}$

$\sigma_i^*(a_1) = .7$ ↑ $\sigma_i^*(a_2) = .3$

$\Rightarrow$ a_1 è una BR

a_2 è una BR

- - - ogni strategia mista tra a_1 e a_2 è una BR

$(\sigma_i^*(a_1) = \sigma_i^*(a_2) = .5)$ ← BR

NASH EQ. (NE)

$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ è un NE se

$\forall i$ σ_i è una BR a σ_{-i}

OGNI GIOCATORE NON INCENTIVI UNILATERALI DI DEVIARE DA σ

Strict Nash : $\forall i \quad u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) > u_i(\sigma_i', \sigma_{-i})$

$\forall \sigma_i' \quad \sigma_i \neq \sigma_i'$

Weak Nash

$\forall i \quad u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(\sigma_i', \sigma_{-i})$

NE in strategie miste sono sempre weak

NE in strategie pure possono essere sia strict che weak

	S	C
S	-1, -1	-4, 0
C	0, -4	-3, -3

Unico NE puro

- NE sono PE? In general, No
- Dominanza iterata

SE STRETTA → NE PRESERVATI

SE DEBOLE O MOLTO DEBOLE → NE NON SONO PRESERVATI

Zero-Sum

	H	T
H	1, -1	-1, 1
T	-1, 1	1, -1

NE in strategie pure?

↓

{ } (stretto)

$\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*)$ $\quad S(\sigma_1^*) = S(\sigma_2^*) = 2$

BR

BR

giocatori i e j — j gioca H con $P = p$

" T con $P = 1-p$

	H	T
H	1, -1	-1, 1
T	-1, 1	1, -1

$$u_i(H, \sigma_j^*) = u_i(T, \sigma_j^*)$$

$$u_i(H) = p - (1-p) = 2p - 1$$
$$u_i(T) = -p + (1-p) = -2p + 1$$

PER AVERE CHE:
$u_i(H) = u_i(T) \Longrightarrow p = \frac{1}{2}$

GIOCATORE j

$i \longrightarrow$

$j \longrightarrow i$

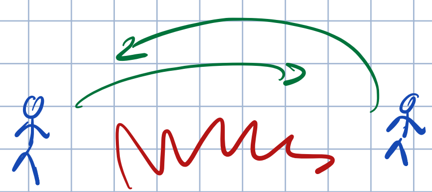
Weak NE

A \ B	O	P
O	2, 1	0, 0
P	0, 0	1, 2

ogni giocatore dovrebbe giocare con $p = \frac{2}{3}$ la scelta preferita e con $p = \frac{1}{3}$ la meno preferita

	S	NS
S	-1, -1	2, 1
NS	1, 2	0, 0

Chicken game



$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

EQUILIBRIUM SELECTION PROBLEM

-1, -1	2, 1
5, .5	0, 0

Social welfare (utility)

	main entrance	Room 5.3
main entrance	1, 1	0, 0
Room 5.3	0, 0	1, 1

FOCAL POINT

Refinements

- ε- NASH $\geq \varepsilon$ $\quad$ $(\varepsilon > 0)$

  NE $\varepsilon = 0$

  esiste sempre

- STRONG NASH:

  nessun sotto-gruppo di agenti ha incentivo a deviare

  (da σ

↓ IMPLICA PARETO EFFICIENZA

RARO!

ATTENZIONE! NE può essere una Weak che Strong

- COMPORTAMENTO MASSIMAMENTE PRUDENTE (1)
- COMPORTAMENTO MASSIMAMENTE AGGRESSIVO (2)

(2 giocatori)

(1) assume che il CASO PESSIMO si verifichi sempre

Giocatore MAXMIN: gioca una strategia finalizzata a massimizzare il peggior caso possibile

↳ CERCARE IL MIGLIOR CASO PESSIMO

$$\arg\max_{\sigma_i} \min_{\sigma_{-i}} u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$$

$$\max_{\sigma_i} \min_{\sigma_{-i}} u(\sigma_i, \sigma_{-i}) = v_i$$ Valore MAXMIN del gioco

GARANTISCE A i UN VALORE v_i

SENZA DOVER FARE ASSUNZIONI PARTICOLARI SULL'AVVERSARIO

↳ equivale ad assumere che $-i$ fa (2)

maxmin strategy spesso chiamata: SECURITY STRATEGY

(SECURITY LEVEL)

② MINMAX

$$\arg\min_{\sigma_i} \max_{\sigma_{-i}} u_{-i}(\sigma_i, \sigma_{-i})$$

$$\max_{\sigma_i} \max_{\sigma_{-i}} u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = h_{-i}$$ valore MINMAX

$\bar{\sigma}_i$ = MAXMIN di i $\qquad$ $\hat{\sigma}_i$ = MINMAX di i

$$u_i(\bar{\sigma}_i, \sigma_{-i}) \geq v_i \quad \forall \sigma_{-i}$$

$$u_i(\sigma_i, \hat{\sigma}_{-i}) \leq h_i \quad \forall \sigma_i$$

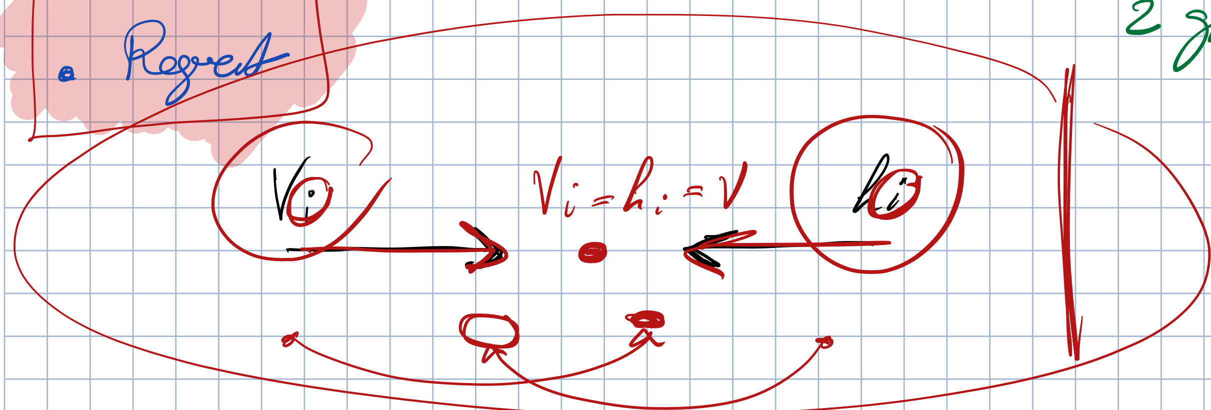
$$u_i(\bar{\sigma}_i, \hat{\sigma}_{-i}) \geq v_i$$

$$u_i(\bar{\sigma}_i, \hat{\sigma}_{-i}) \leq h_i \implies v_i \leq h_i$$

$\Downarrow$

$v_i = h_i$ nei giochi a 2 giocatori

- Dualità
- Regret



$$\sigma^* = (\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \quad NE$$

$$u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*) \quad \forall \sigma_i$$

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*) \geq \min_{\sigma_{-i}} u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \quad \forall \sigma_i$$

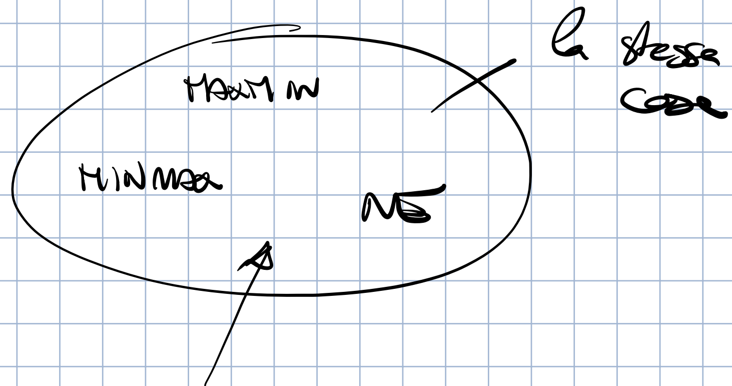
$$u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq \boxed{\min_{\sigma_{-i}} u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})} \quad \forall \sigma_i$$

$$u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq \max_{\sigma_i} \min_{\sigma_{-i}} u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = v_i$$

<u>NE</u> non è mai peggio di <u>MAXMIN</u>

Strictly Competitive (Zero-Sum)

$$u_1 = -u_2$$



BR

$\sigma = (\sigma_1^*, \sigma_2^*)$ NE

BR

$u_2(\sigma_1^*, \sigma_2^*) \geq u_2(\sigma_1^*, \sigma_2) \quad \forall \sigma_2$ NE

$u_2 = -u_1$ SC

$u_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) \leq u_1(\sigma_1^*, \sigma_2) \quad \forall \sigma_2$

$$u_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = \min_{\sigma_2} u_1(\sigma_1^*, \sigma_2)$$

$$u_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) \leq \max_{\sigma_1} \min_{\sigma_2} u_1(\sigma_1, \sigma_2)$$

$\geq$

$\Rightarrow u_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = v_1$ NE $\Rightarrow$ MAXMIN

MAXMIN $\Rightarrow$ NE

$v_1 = h_1 = v \Longleftrightarrow v_2 = h_2 = -v$

$$\boxed{\max_x f(x) = -\min_x (-f(x))}$$

$\downarrow$

$(\bar\sigma_1, \bar\sigma_2)$ MAXMIN

1 $u_1(\bar\sigma_1, \sigma_2) \geq v \quad \forall \sigma_2$

2 $u_2(\sigma_1, \bar\sigma_2) \geq -v \quad \forall \sigma_1$

$\Rightarrow$ $u_1(\bar\sigma_1, \bar\sigma_2) \geq v$

$u_2(\bar\sigma_1, \bar\sigma_2) \geq -v$

$u_1(\bar\sigma_1, \bar\sigma_2) \leq v$

3 $\Rightarrow u_1(\bar\sigma_1, \bar\sigma_2) = v$

① , ② $u_1(\bar{\sigma}_1, \sigma_2) \geq u_1(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2) \quad \forall \sigma_2$

$$u_2(\bar{\sigma}_1, \sigma_2) \leq u_2(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2) \quad \forall \sigma_2$$

② , ③ $\Rightarrow \quad u_1(\sigma_1, \bar{\sigma}_2) \leq u_1(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2) \quad \forall \sigma_1$

$$\boxed{(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2) \text{ MAXMIN} \Rightarrow \text{NE}}$$

NE $\Leftrightarrow$ MAXMIN

2-player
zero-sum

NEI GIOCHI A 2 GIOCATORI A SOMMA ZERO

A) (σ_1^*, σ_2^*) NE $\Longrightarrow$ σ_1^*, σ_2^* MAXMIN

B) $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2)$ MAXMIN $\Longrightarrow$ $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2$ NE

Corollario: ogni NE ha lo stesso valore

$\Longrightarrow$ NON C'È PROBLEMA DI EQ. SELECTION

- Intercambiabilità

(σ_1, σ_2) NE $\qquad (\sigma_1', \sigma_2')$ NE

da A
- σ_1 e σ_1' sono MAXMIN PER 1
- σ_2, σ_2' " " " 2

(σ_1, σ_2') e (σ_1', σ_2) NE

BR → Nash → MAXMIN / MINMAX

$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ è un NE se $\forall i$ σ_i è una BR a σ_{-i}

$V_i \leq h_i$ $\quad V_i$ MAXMIN → lower bound per i

$\quad h_i$ MINMAX → upper bound per i

2 giocatori $\quad V_i = h_i \quad V_i \leq h_i$

2 giocatori, strictly competitive $\quad$ NE = MAXMIN = MINMAX

(zero - sum)

Giocatore 2, Calcolare la strategia MINMAX

LINEAR PROGRAM

Variabili: $\quad \sigma_2(a_j) \quad \forall a_j \in A_2, \quad h_1$

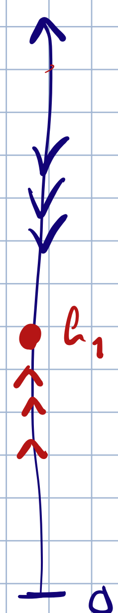
$$\min h_1$$

$$\sum_{a_j \in A_2} \sigma_2(a_j)\, u_1(a_1, a_j) \leq h_1 \quad \forall a_1 \in A_1$$

$$\sum_{a_j \in A_2} \sigma_2(a_j) = 1$$

$$\sigma_2(a_j) \geq 0 \quad \forall a_2 \in A_2$$

LP (si risolve in modo efficiente)



n giocatori? ($n > 2$)

MAXMIN su n giocatori?

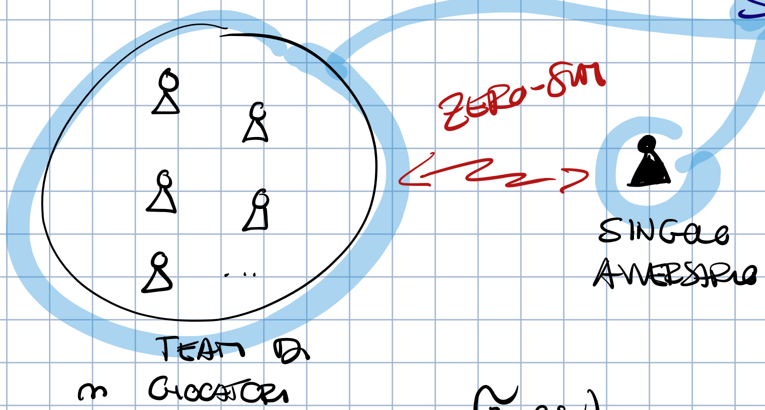
Si può calcolare MA

- No EQUILIBRIO
- $V_i < h_i$

MINMAX

$\hat{\sigma}_i^j$

TEAM GAME $\quad n > 2$, Zero - Sum



STSA - SC

(Von Stengel)

σ esito

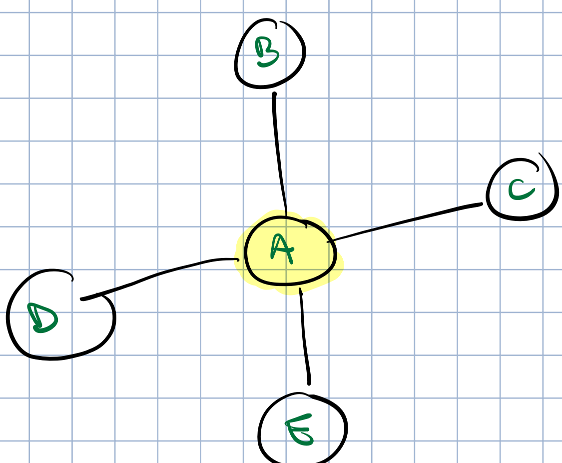
$u_t(\sigma)$ PAYOFF IN σ $\quad \Big(\underbrace{n u_t(\sigma)}_{\text{AL TEAM}}, \underbrace{-n u_t(\sigma)}_{\text{ALL'AVVERSARIO}}\Big)$

- Possono pianificare insieme
- Ma non possono coordinare l'esecuzione

PURSUIT EVASION → Robotica

(guardie e ladri)

$\underline{\quad 1 \quad}$ 1 unità di distanza

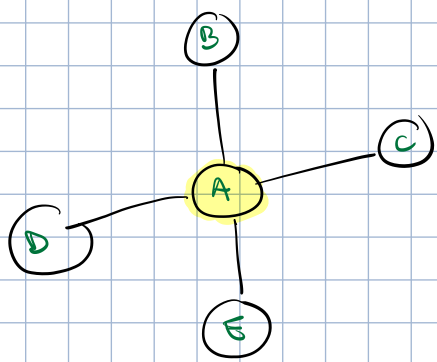


TEAM = { C, S }

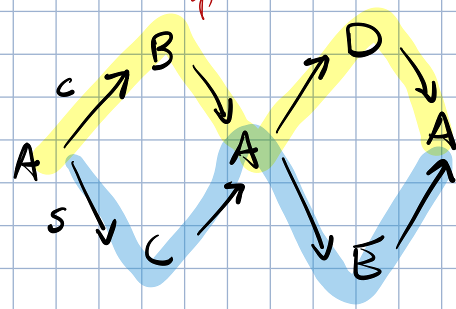
ADVERSARY = { Evader }

- E si trova, nascosto, da qualche parte
- E ha accesso alla posizione corrente delle guardie ad ogni t
- E ha velocità infinita

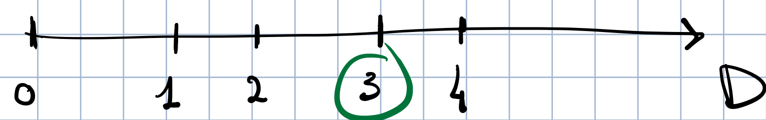
- Guardie stanno inizialmente in A
- prob $\geq \frac{1}{D}$ D = massima distanza percorsa da una guardia nel grafo



$\geq \frac{1}{3}$ MAXMIN S^*

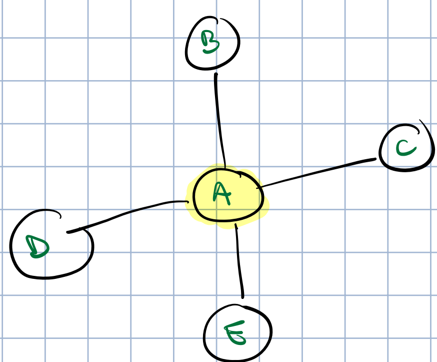


GRAPH CLEARING

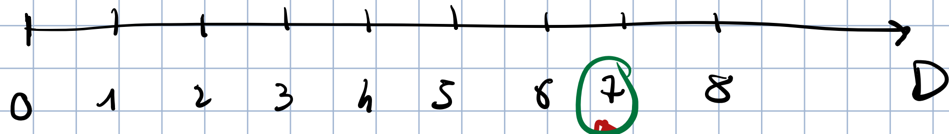


CATTURA GARANTITA !

$\boxed{\geq \frac{1}{7}}$



A	A	A	A	A	A	A	A	A
A	B	A	C	A	D	A	E	A



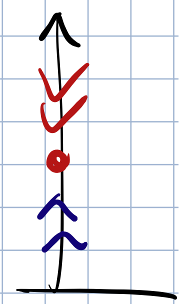
CATTURA GARANTITA !

- Coordinarsi a PLANNING TIME
- NO coordinazione at EXECUTION TIME

EVADER MINMAX $S^* \rightsquigarrow \leq \frac{1}{3}$

$$\frac{1}{7} \overset{gap}{\rightsquigarrow} \frac{1}{3} \Rightarrow$$ NON STATO IN UN EQUILIBRIO

Team - MaxMin



$$\max V$$
$$s.t.$$
$$V \leq \sum_{a_T \in A_T} u_t(a_T, a_{n+1}) \boxed{\prod_{i \in T} \sigma_i(a_i)} \quad \forall a_{n+1} \in A_{n+1}$$

$$\sum \sigma_j \quad \forall j$$

NON LINEARE!

Si può approssimare

$$\varepsilon \geq \sqrt{\frac{\ln m}{2n}}$$

ADDITIVO

quasi-polinomiale

NASH ?

- Complementarietà lineari (Lemke-Howson)
- Enumerazione di supporti
- MIP-NASH (MIP = Mixed-Integer Linear Program)

• Complessità ?

Problem $\longrightarrow$ Decision problem

YES / NO

2006 PPAD (polynomial parity argument, directed version)

PPAD $\neq$ P

2 giocatori

$U_i^* =$ utilità attese che i ottiene in NE

$\downarrow$

outcome generico σ $\quad U_i^* - \underbrace{x_i}$ $\qquad x_i$: " REGRET "

> 0 NO NE

0 NE

$$\sum_{a_2 \in A_2} u_1(a_j, a_2)\,\sigma_2(a_2) = U_1^* - r_1^j \quad \forall a_j \in A_1$$

$$\sum_{a_1 \in A_1} u_2(a_1, a_j)\,\sigma_1(a_1) = U_2^* - r_2^j \quad \forall a_j \in A_2$$

$$\sigma_i(a_i) \geq 0 \quad \forall i, a_i \in A_i \qquad \sum_{a_i \in A_i} \sigma_i(a_i) = 1 \quad \forall i \in \{1,2\}$$

$$r_i^j \geq 0 \quad \forall i \in \{1,2\} \;\forall a_j \in A_j$$

SE SIAMO IN UN NE:

$$\sigma_i(a_i) > 0 \Longrightarrow r_i^j = \emptyset$$

$$\sigma_i(a_i) = 0 \Longrightarrow r_i^j \not> 0$$

$$r_i^j \,\sigma_i(a_j) = \emptyset \quad \forall i, a_j \in A_i$$

non lineare

(complementarità lineare)

$\boxed{\text{Lemke-Howson}}$ Nash è un LC

$S = (S_1, S_2) \qquad S_i \subseteq A_i$

$$\sum_{a_{-i} \in S_{-i}} \sigma_{-i}(a_{-i})\, u_i(a_i, a_{-i}) = r_i \qquad \forall i \in \{1,2\},\ a_i \in S_i$$

$$\sum_{a_{-i} \in S_{-i}} \sigma_{-i}(a_{-i})\, u_i(a_i, a_{-i}) \leq r_i \qquad \forall i \in \{1,2\},\ a_i \notin S_i$$

$\checkmark \checkmark$

- Supporti bilanciati
- Supporti piccoli

\+ DOMINANZA

ENUM $\geq$ LH

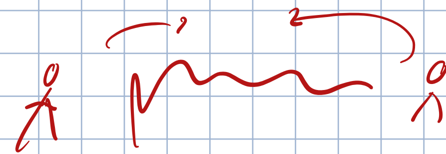
MIP-NASH = LC senza vincolo di complementarietà lineare

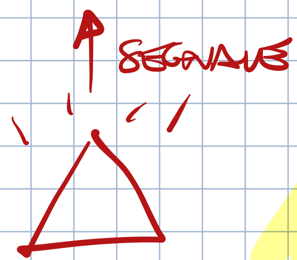
$\downarrow$

VARIABILI BINARIE

	S	NS
S	-4, -4	2, 1
NS	1, 2	0, 0

Chicken game





$\frac{1}{3}\,(S, NS)$ $\frac{1}{3}\,(NS, S)$

$\frac{1}{3}\,(NS, NS)$

Ricevo S P altro giocatore ha ricevuto S? $\Longrightarrow \emptyset$

Ricevo NS

P altro NS? $\frac{1}{2}$

P altro S? $\frac{1}{2}$

	S	NS
S	-4, -4	2, 1
NS	1, 2	0, 0

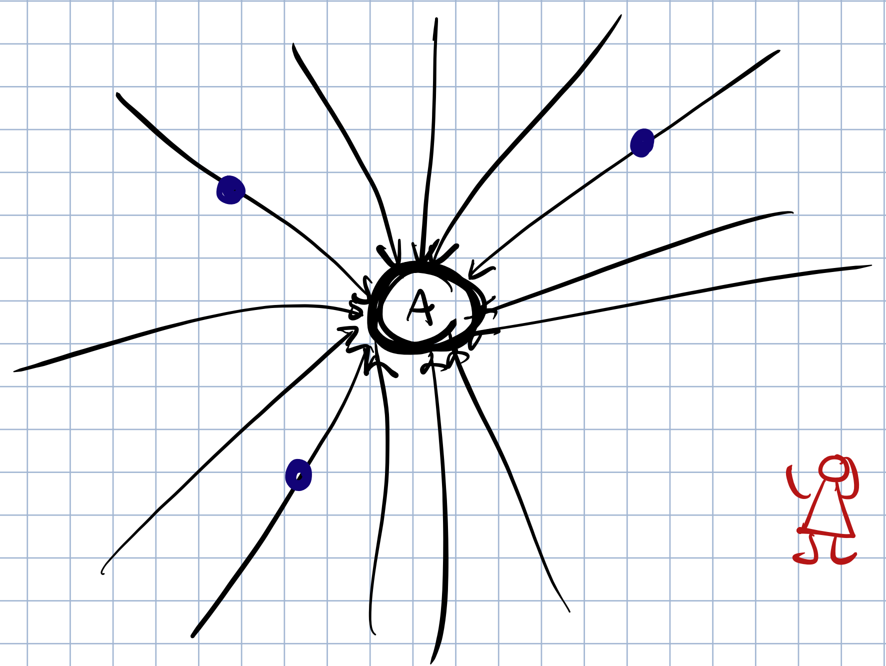
$u_{NS} = \frac{1}{2}$

$u_S = \frac{1}{2}(-4) + \frac{1}{2}\cdot 2 = -1$

EQUILIBRIO CORRELATO

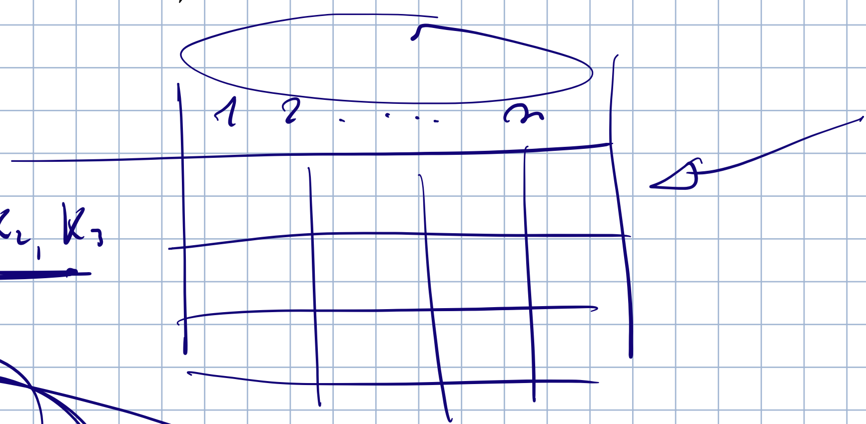
Stackelberg (Leader - Follower)

LAX

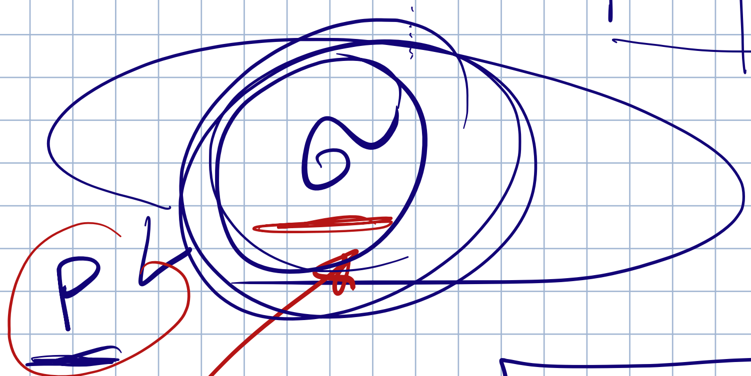


$P \quad k = 3$

$n > k$



$\Delta P \quad k_1, k_2, k_3$



avversario giocare una best response
DATO il commitment

LEADER commitment (annere)

FOLLOWER risponde all'annuncio

$\neq$ BR

$\downarrow$

SECURED GAMES